2.2.17 Exercice Après une soirée bien arrosée...

Après une soirée bien arrosée, Jules arrive devant sa porte avec son trousseau de 10 clefs qu'il ne peut plus distinguer. Calculer

a) La probabilité qu'exactement la sixième soit la bonne.

b) Qu'il puisse ouvrir sa porte lors des trois premières tentatives.

Solution

a) $p = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}$

une clé

$= \left(\frac{9}{10}\right)^5 \cdot \frac{1}{10}$

Quelle est la probabilité que la première clé soit fausse?

b) $X :=$ le nombre de tentatives avant le succès

$\mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$

$= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} =$

Corrigé exercice 2.2.17

a) Il faut que les 5 premières soient mauvaises et que la sixième soit la bonne, $\frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

b) On additionne les chances qu'il y a, d'ouvrir à la première, à la deuxième et à la troisième tentative :

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

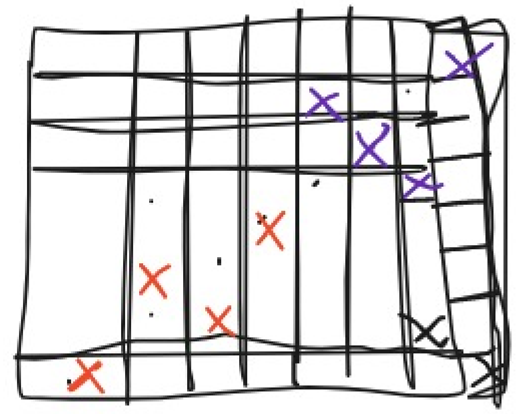
On peut également calculer la probabilité de l'événement complémentaire qui est "ne pas ouvrir lors des 3 premières tentatives" et soustraire cette probabilité à 1.

$$1 - \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

2.2.18 Exercice Huit tours sont disposées au hasard ...

Huit tours sont disposées au hasard sur un jeu d'échec. Calculer la probabilité qu'aucune ne puisse en prendre une autre.

Solution



les possibilités pour l'évenement A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8!}{64\cdot 63\cdot 62\cdots 57}$$

toutes les posibilitès

$$|A| = 8\cdot 7\cdot 6\cdot \ldots \cdot 1 = 8!$$

$$= \frac{8!}{\frac{64!}{56!}} =$$

$$p = \cancel{1-8!} \quad 1 - \frac{1}{8!}$$

$$p =$$

$$=$$

$$7\cdot 6\cdot 5 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} = \frac{7!}{4!}$$

$$64\cdot 63\cdot \ldots \cdot 57 = \frac{64!}{56!}$$

Tu divises par une fraction en mulitpliant par l'inverse de cette fraction!

$$= 8! \cdot \frac{56!}{64!}$$

$$\approx 2{,}26\cdot 10^{-10}$$

Corrigé exercice 2.2.18 Il faut placer les tours de manière à ce qu'aucune ne puisse prendre une autre, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver deux tours qui partagent une même ligne ou une même colonne. On peut voir sur le dessin ci-dessous comment procéder. On peut placer la première tour de 64 manières différentes, une fois placée, celle-ci interdit la ligne et la colonne où elle se trouve, c'est-à-dire 15 cases. Il reste alors 49 possibilités pour mettre la seconde, qui à son tour condamne 13 cases. Il reste alors 36 cases

de libres pour la quatrième... et ainsi de suite. En étudiant de plus près la série obtenue $(64\times 49\times 36\times 25\ldots.)$, on se rend compte que l'on peut la traduire par l'expression :

$$\prod_{i=1}^{8} i^2$$

On peut mettre huit tours de $64\times 63\times 62\times 61\times 60\times 59\times 58 =$ manières possible. La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{\prod_{i=1}^{8} i^2}{64\times 63\times 62\times 61\times 60\times 59\times 58} = \frac{1.6\times 10^9}{3.12\times 10^{12}} = 0.00051$$

2.2.19 Exercice On jette une paire de dés équilibrés...

On jette une paire de dés équilibrés. Avec quelle probabilité la valeur du résultat du deuxième dé est-elle plus grande que celle du premier ?

Solution

$X :=$ le nombre du premier dé

$Y :=$ le nombre du deuxième dé

$\cup \quad \cap$

$$\mathbb{P}(X<Y) = $$
$$= \mathbb{P}(X=5, Y=6) + \mathbb{P}(X=4, Y=5) + \mathbb{P}(X=4, Y=5)$$
$$= \frac{|X<Y|}{|\Omega|} = \frac{|\{(5,6),(4,6),(3,6),\dots(1,6),(\ ,5)\}|}{6^2} =$$

$$|\{X<Y\}\cap\{Y=6\}| = 0$$

$$= \frac{5+4+3+2+1+0}{6^2} = \frac{15}{36} \overset{:3}{=} \frac{5}{12}$$

Tu n'as pas besoin d'écire plus 0

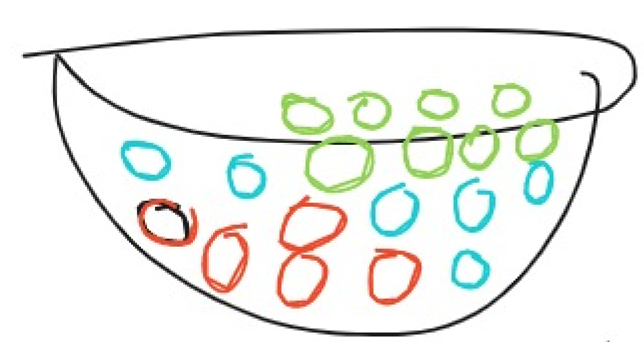
2.2.20 Exercice Une urne contient cinq boules rouges...

Une urne contient cinq boules rouges, six bleues et huit vertes. Si un groupe de trois boules est tiré au hasard, quelle est la probabilité que celles-ci soient

a) toutes de la même couleur ?

b) toutes de couleurs différentes ?

Solution



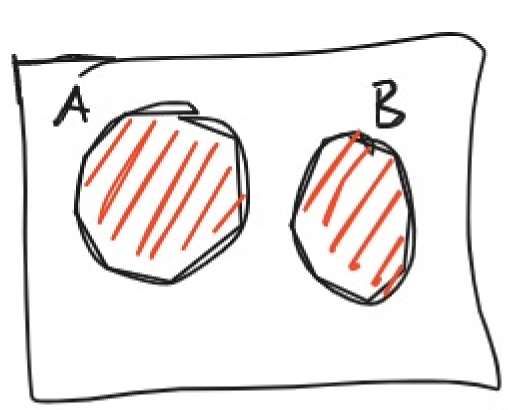
a) $V :=$ l'événement que toutes les trois boules soient vertes

$B :=$ " bleues

$R :=$ " rouges

$M :=$ même couleur

$$P(M) = P(V \cup B \cup R) =$$
$$= P(V) + P(B) + P(R)$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$